Problema 20

Para un dipolo

a) Determinar la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio

b) Repetir a) considerando que uno de los puntos está muy lejos del dipolo

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

d) Dibujar líneas de campo eléctrico representativas del problema

e) Dibujar líneas equipotenciales representativas del problema

f) Calcular el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A – ubicado sobre la recta que une ambas cargas, a otro punto B – ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas

Problema 20

Distribución discreta de cargas

- Ley de Coulomb:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_j \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{\left|\vec{r}-\vec{r}_j\right|^3} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{r} = \textit{Punto campo: donde quiero calcular el campo}$$

$$\vec{r}_j = \textit{Punto fuente j: donde está la carga } q_j$$

Diferencia de potencial V

$$V\left(\vec{r}_f\right) - V\left(\vec{r}_i\right) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$W_{\vec{r}_f,\vec{r}_i}\Big|_{q_o} = q_o\left(V\left(\vec{r}_f\right) - V\left(\vec{r}_i\right)\right)$$

$$q_o = \textit{Carga puntual}$$

$$\vec{r}_f = \textit{Posición Final}$$

$$\vec{r}_i = \textit{Posición Incial}$$

Problema 20

Caso elemental: carga puntual

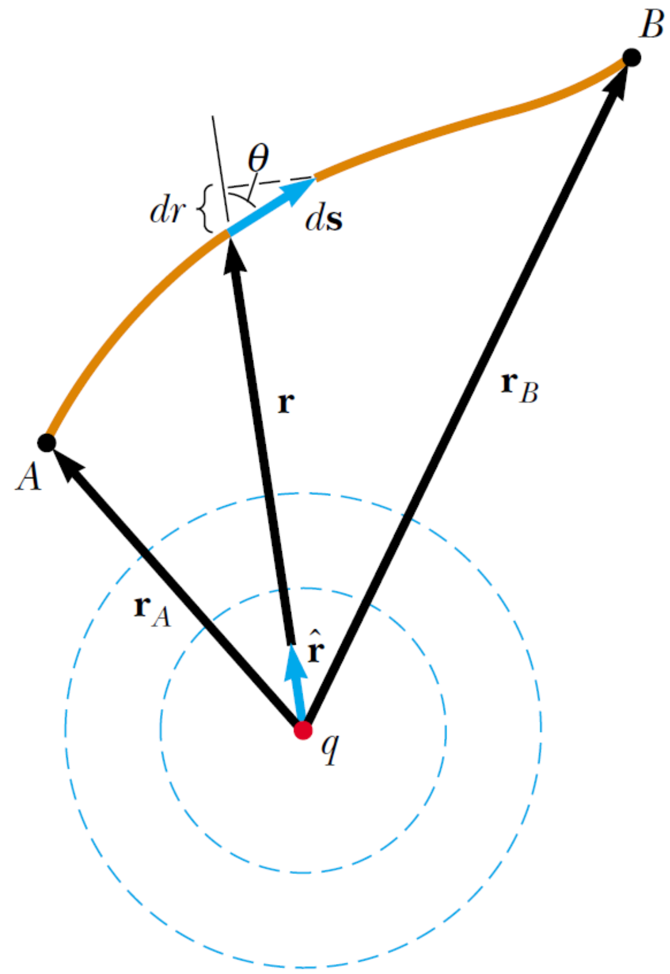
$$q = Carga\ \ puntual\ \ fuente$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_B$$

$$V\left(\vec{r}_B\right) - V\left(\vec{r}_A\right) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{\vec{r}_B,\vec{r}_A}\Big|_{q_o} = q_o\left(V\left(\vec{r}_B\right) - V\left(\vec{r}_A\right)\right)$$



CASO GENERAL !!!

Distribuciones de carga tanto acotadas como no acotadas

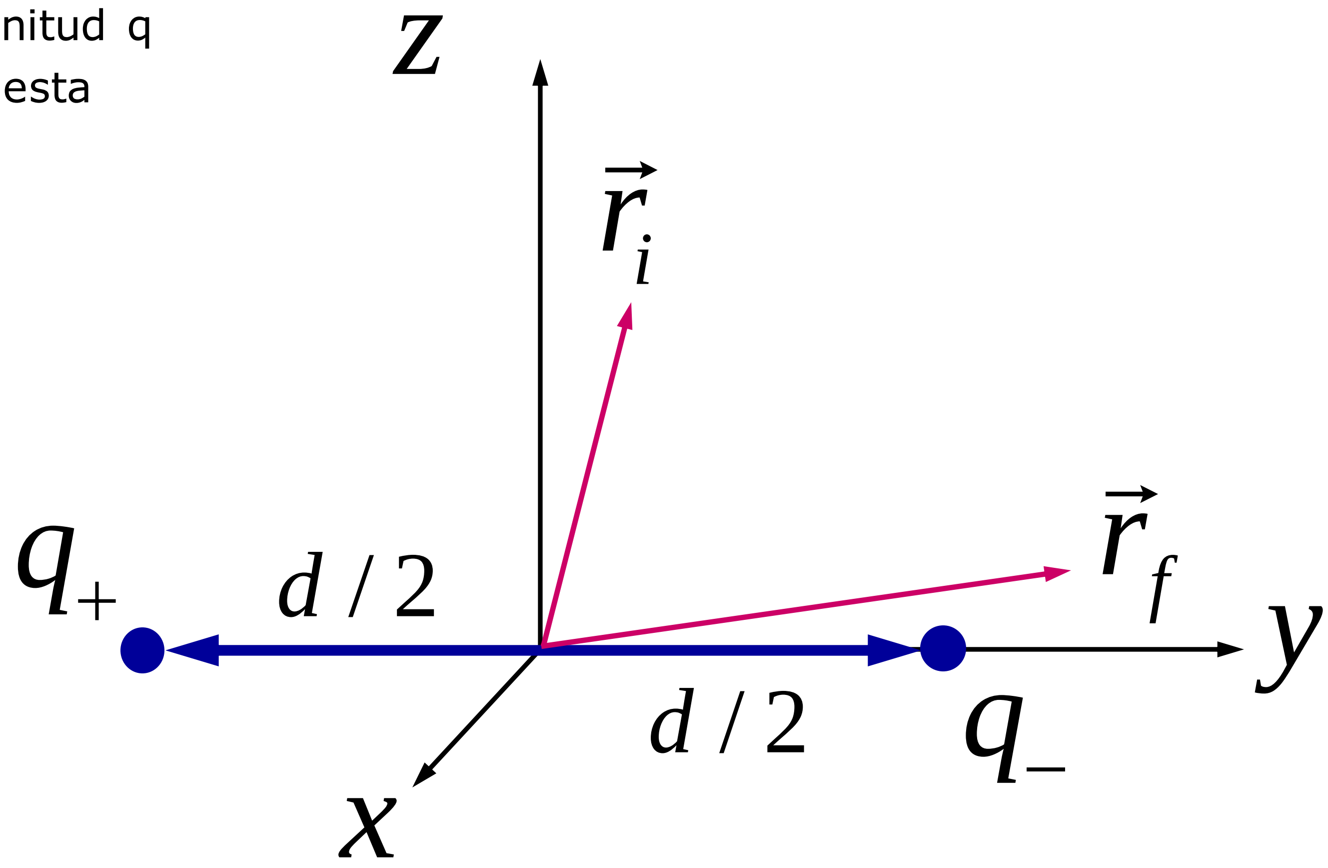
CARGAS ACOTADAS EN EL ESPACIO

Calculo diferencia de potencial sin previo calculo campo eléctrico

Problema 20

Dipolo eléctrico

- Dos cargas
  - Igual magnitud q
  - Carga opuesta
  - d



Problema 20

Cargas acotadas en el espacio

- Cálculo de la diferencia de potencial
  - Ecuación (50) del apunte extendida para una distribución de *n* cargas

$$V\left(\vec{r}_f\right)-V\left(\vec{r}_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left|\vec{r}_f-\vec{r}_j\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}\right] \quad (1)$$

- En caso que se desee calcular las componentes del campo eléctrico
  - Ecuación (43) del apunte

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)=-\mathrm{grad}(V)$$

Problema 20

a) Determinar la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio

- Dipolo eléctrico

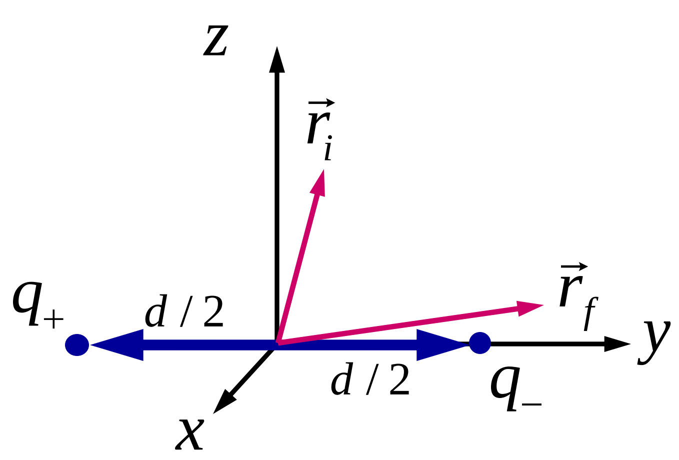
$$q_- = -q_+$$

$$V\left(\vec{r}_f\right) - V\left(\vec{r}_i\right) = \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \vec{r}_{q+}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q+}\right|}\right) - \left(\frac{1}{\left|\vec{r}_f - \vec{r}_{q-}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q-}\right|}\right)\right] \quad (2)$$

$$\vec{r}_{q+} = -\frac{d}{2}\,\hat{j}\,;\,\vec{r}_{q-} = \frac{d}{2}\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_f = x_f\,\hat{i} + y_f\,\hat{j} + z_f\,\hat{k}$$

$$\vec{r}_i = x_i\,\hat{i} + y_i\,\hat{j} + z_i\,\hat{k}$$



Problema 20

a) Determinar la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos arbitrarios del espacio

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q+} = x_f\ \hat{i} + (y_f + y_{q+})\ \hat{j} + z_f\ \hat{k}$$

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q-} = x_f\ \hat{i} + (y_f - y_{q-})\ \hat{j} + z_f\ \hat{k}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q+} = x_i\ \hat{i} + (y_i + y_{q+})\ \hat{j} + z_i\ \hat{k}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q-} = x_i\ \hat{i} + (y_i - y_{q-})\ \hat{j} + z_i\ \hat{k}$$

$$\left|\vec{r}_f - \vec{r}_{q+}\right| = \left[x_f^{\ 2} + (y_f - y_{q+})^2 + z_f^{\ 2}\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q+}\right| = \left[x_i^{\ 2} + (y_i - y_{q+})^2 + z_i^{\ 2}\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{r}_f - \vec{r}_{q-}\right| = \left[x_f^{\ 2} + (y_f - y_{q-})^2 + z_f^{\ 2}\right]^{1/2}$$

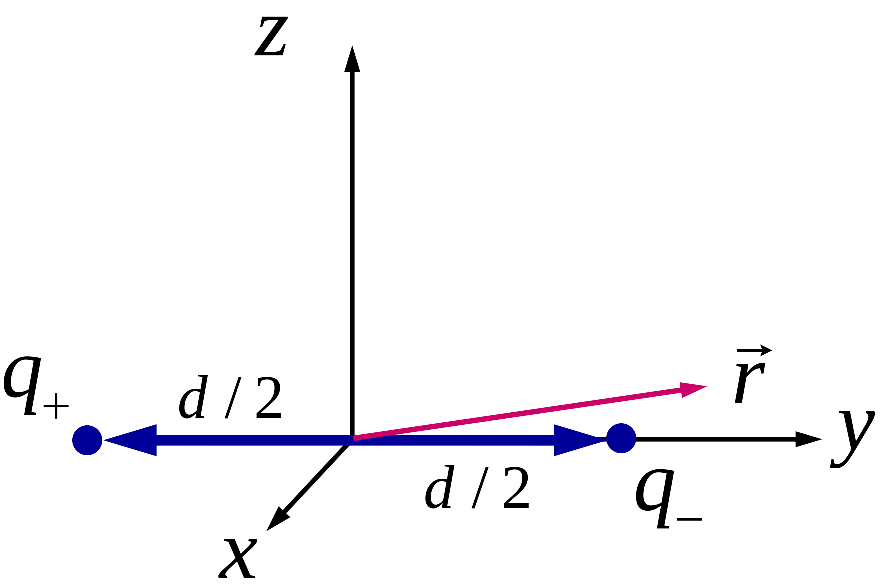
$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q-}\right| = \left[x_i + (y_i - y_{q-})^2 + z_i^{\ 2}\right]^{1/2}$$

Problema 20

b) Repetir considerando que uno de los puntos está muy lejos del dipolo

- Si asumimos que el punto inicial se encuentra muy lejos del dipolo,
  - Ecuación (2)

$$\Rightarrow \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q_+}\right|} \rightarrow 0 \qquad \frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q_-}\right|} \rightarrow 0$$



$$V_{Ref} = V\left(\vec{r}_i\right) = 0$$

$$\vec{r}_f = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

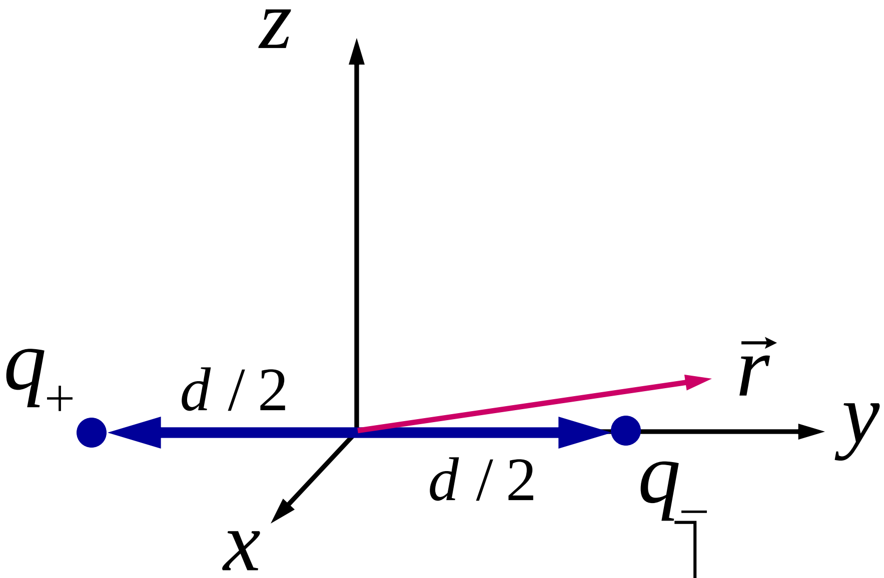
$$V\left(\vec{r}_f\right) = \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{q_+}\right|} + \frac{q_-}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{q_-}\right|} \qquad (3)$$

Problema 20

b) Repetir considerando que uno de los puntos está muy lejos del dipolo

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_{q_+}\right| = \left[x^2 + \left(y+\frac{d}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_{q_-}\right| = \left[x^2 + \left(y-\frac{d}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



$$V(\vec{r}) = \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y+\frac{d}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y-\frac{d}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right] \quad (4)$$

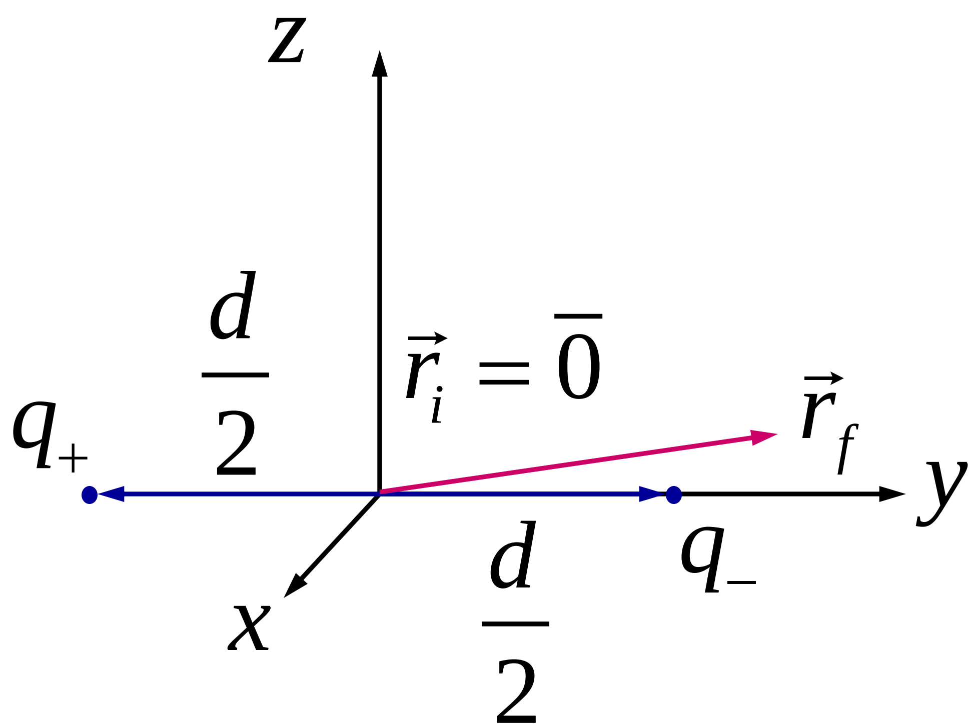
Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

- Si asumimos que el punto inicial se encuentra en el origen

$$\vec{r}_f = x_f\ \hat{i} + y_f\ \hat{j} + z_f\ \hat{k}$$

$$\vec{r}_i = \overline{0}$$



Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q+} = x_f \ \hat{i} + (y_f + d/2) \ \hat{j} + z_f \ \hat{k}$$

$$\vec{r}_f - \vec{r}_{q-} = x_f \ \hat{i} + (y_f - d/2) \ \hat{j} + z_f \ \hat{k}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q+} = d/2 \ \hat{j}$$

$$\vec{r}_i - \vec{r}_{q-} = -d/2 \ \hat{j}$$

$$\left|\vec{r}_f - \vec{r}_{q+}\right| = \left[x_f{}^2 + (y_f + d/2)^2 + z_f{}^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q+}\right| = \left[(d/2)^2\right]^{1/2} = d/2$$

$$\left|\vec{r}_f - \vec{r}_{q-}\right| = \left[x_f{}^2 + (y_f - d/2)^2 + z_f{}^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_{q-}\right| = \left[(-d/2)^2\right]^{1/2} = d/2$$

Problema 20

c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

$$V\left(\vec{r}_f\right)-V\left(\vec{r}_i=0\right)=\frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left[x^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\frac{d}{2}}-\frac{1}{\left[x^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\frac{d}{2}}\right]$$

Problema 20

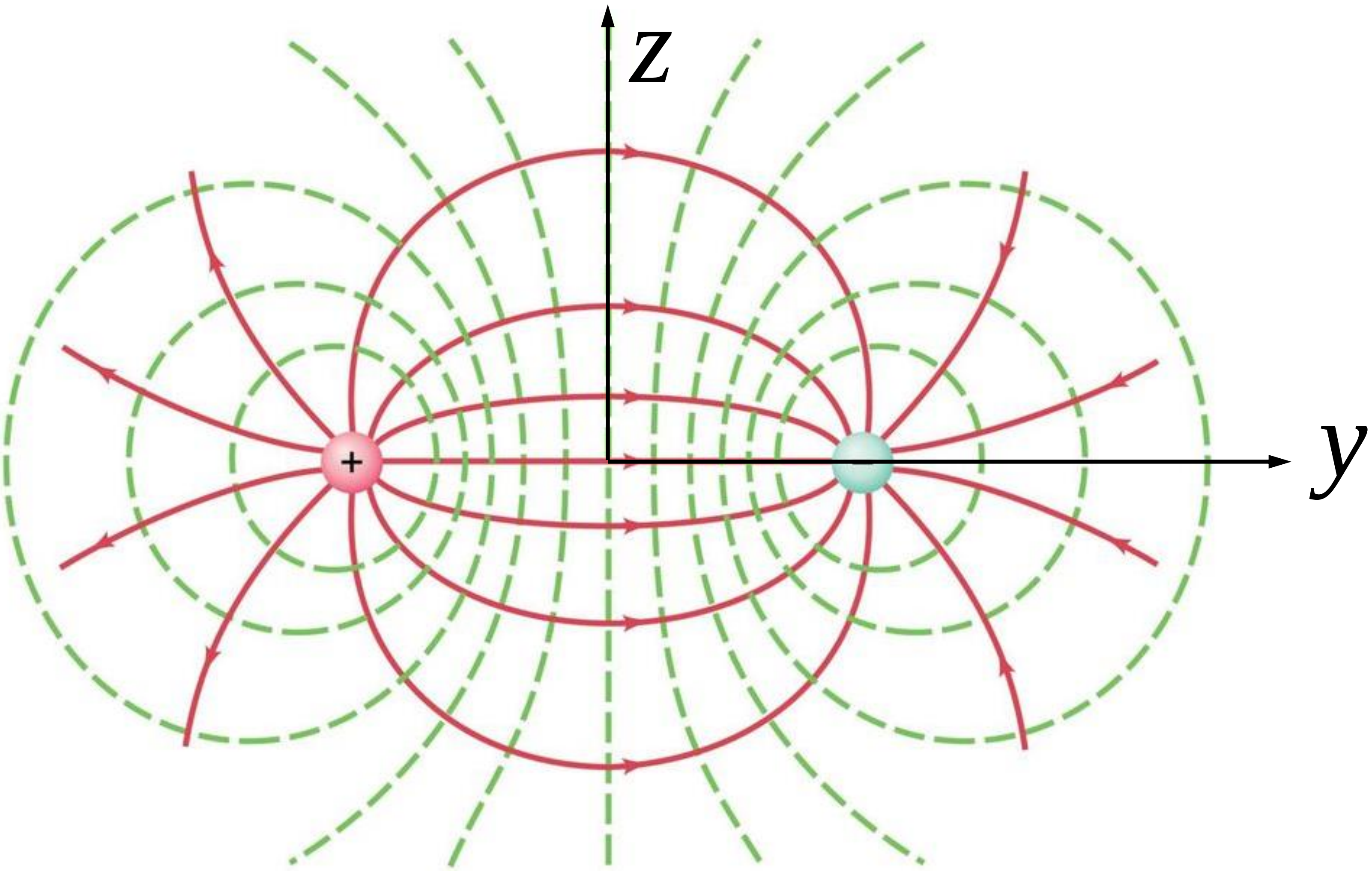
c) Repetir a) considerando que uno de los puntos es el punto medio del segmento que une ambas cargas

$$V\left(\vec{r}_f\right)-V\left(\vec{r}_i=0\right)=\frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left[x^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\left[x^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+z^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right] \quad (5)$$

Problema 20

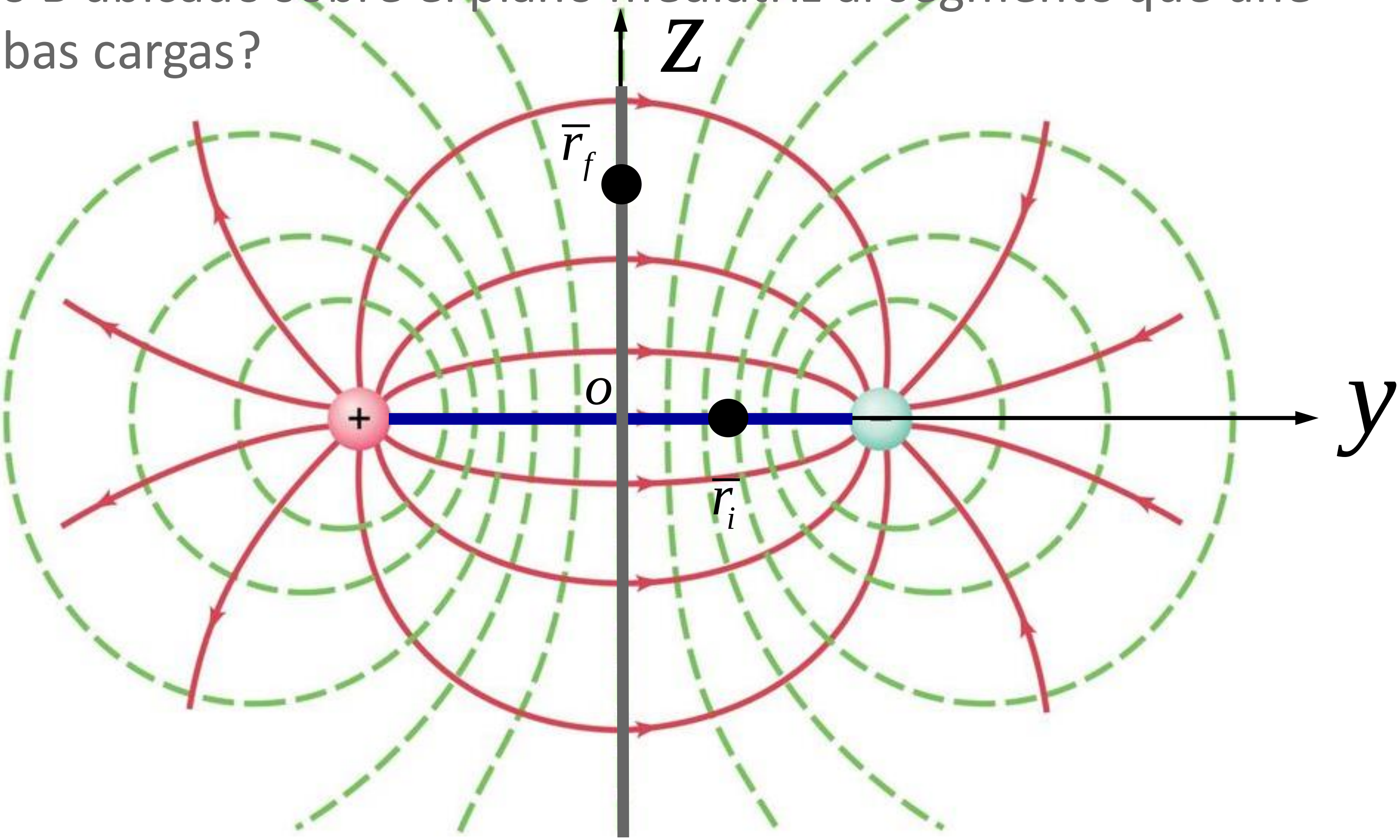
d) Dibujar algunas líneas representativas de campo eléctrico

e) Dibujar algunas equipotenciales



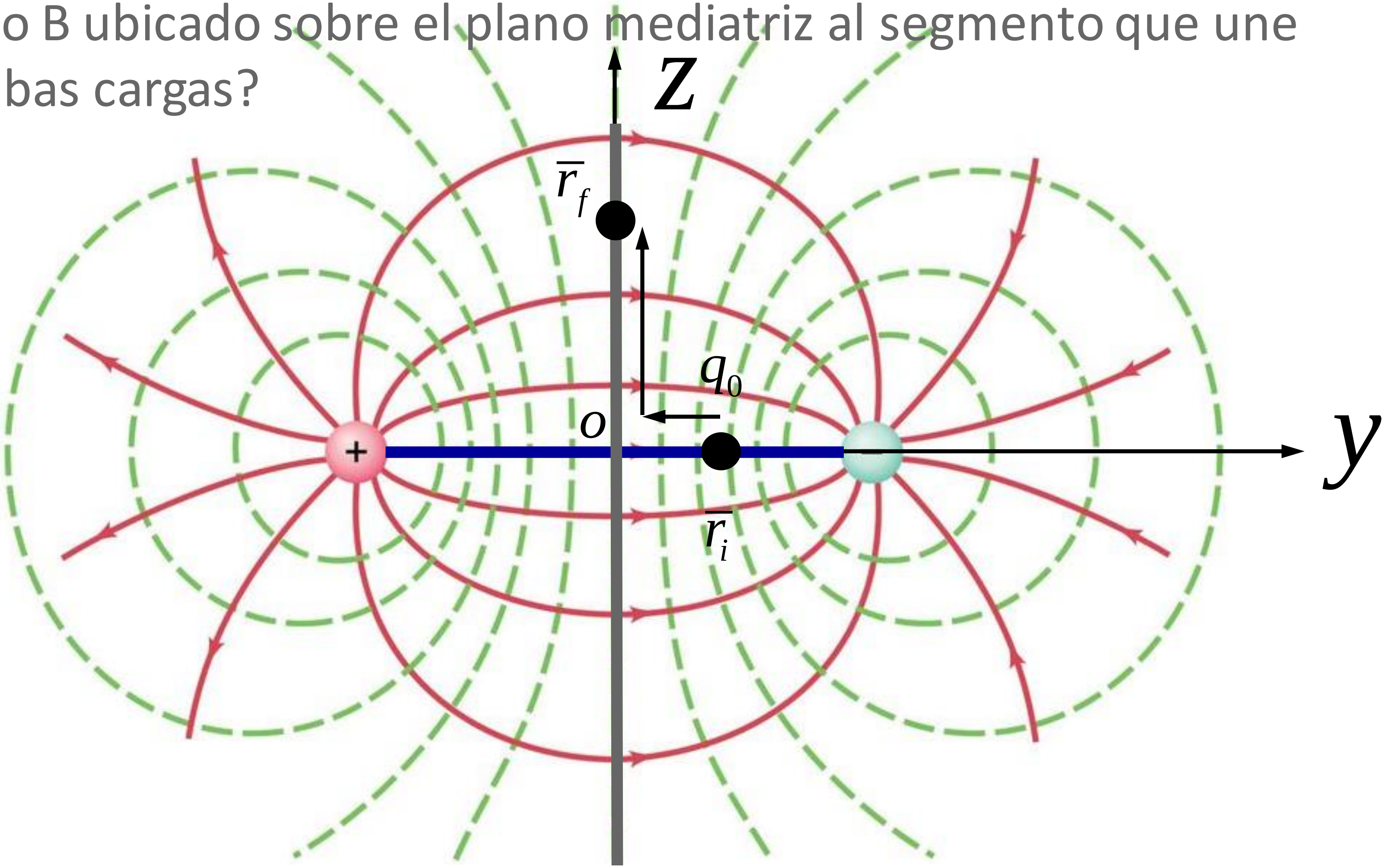
Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?



Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?



Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?

- Para su cálculo, podemos utilizar la ecuación (5) anteriormente obtenida
  - Posición inicial en el origen

$$V\left(\vec{r}_f\right) - V\left(\vec{r}_i = 0\right) = \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right] \quad (5)$$

Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?

- Consideremos este caso en especial:

$$\vec{r}_i = \overline{0}$$

$$\vec{r}_f = y\ \hat{j} \qquad y < d/2$$

$$W' = q_0 \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\left[\left(y+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[\left(y-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (6)$$

Problema 20

f) ¿Cuál es el trabajo para llevar una carga puntual desde un punto A ubicado sobre la recta que une ambas cargas a otro punto B ubicado sobre el plano mediatriz al segmento que une a ambas cargas?

- Como nuestro caso es el opuesto:

$$\vec{r}_i = y\ \hat{j} \quad y < d/2$$

$$\vec{r}_f = \overline{0}$$

$$W = -W' = -q_0 \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left[\left(y+\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[\left(y-\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right]$$